

СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗВИТИЯ НОВОГО ОБЩЕСТВА

СРАВНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ФОРМИРОВАНИЯ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ

МИНОВ АЛЕКСАНДР ВАСИЛЬЕВИЧ

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики Саратовского социально-экономического института (филиал) ФГБОУ ВО «Российский экономический университет имени Г.В.Плеханова», Саратов, Россия

Email: alexminov@rambler.ru

АВЕРЬЯНОВА ЛЮБОВЬ ЛЕОНИДОВНА

студент 4 курса факультета международного бизнеса и торговли Саратовского социально-экономического института (филиал) ФГБОУ ВО «Российский экономический университет имени Г.В.Плеханова», Саратов, Россия

Email: lubov.aver1994@gmail.com

ЛОБАНОВА АНАСТАСИЯ СЕРГЕЕВНА

студент 4 курса финансово-кредитного факультета Саратовского социально-экономического института (филиал) ФГБОУ ВО «Российский экономический университет имени Г.В.Плеханова», Саратов, Россия

Email: lobanova94@mail.ru

АННОТАЦИЯ

В работе рассмотрены модели диверсификации портфеля ценных бумаг Марковица и Шарпа. Сформулированы их основные принципы и описаны математические модели для решения прямой и обратной задач оптимизации структуры портфеля ценных бумаг. На основе проведенного анализа моделей оптимизации портфеля ценных бумаг и соответствующих расчетов сделан вывод о том, что применительно для данного случая более подходящей из двух классических схем выбора портфеля ценных бумаг является модель Марковица.

Ключевые слова: инвестиционный портфель, модель Марковица, модель Шарпа, инвестор, оптимизации портфеля ценных бумаг.

INVESTMENT PORTFOLIO MODELS

ALEXANDER MINOV

Ph.D., Associate Professor the department of applied mathematics and informatics; Saratov State Socio-Economic Institute (branch) of Plekhanov Russian University of Economics, Saratov, Russia

Email: alexminov@rambler.ru

LUBOV AVERYANOVA

4th-year student, Department of the International Trade and Business; Saratov State Socio-Economic Institute (branch) of Plekhanov Russian University of Economics, Saratov, Russia

Email: lubov.aver1994@gmail.com

ANASTASIA LOBANOVA

4th-year student, Finance and Credit Department; Saratov State Socio-Economic Institute (branch) of Plekhanov Russian University of Economics, Saratov, Russia

Email: lobanova94@mail.ru

ABSTRACT

In this article authors investigate models of investment portfolio diversification: Markowitz and Sharpe models. The authors have formulated the main principles of these models and described mathematical models for direct and indirect issues for optimization the structure of investment portfolio. Finally, authors have come to the conclusion that Markowitz model is more appropriate for using.

Keywords: investment portfolio, Markowitz model, Sharpe model, investor, investment portfolio optimization.

В рациональном использовании свободных денежных средств заинтересован любой предприниматель. Деньги могут и должны «работать». Критерии привлекательности для каждого инвестора могут быть разными, но существуют два основных параметра, по которым принимается окончательное решение – это риск и доходность инвестиций. Сравнивая и оценивая эти показатели, потенциальный инвестор делает выводы о привлекательности того или иного сектора экономики, сферы

бизнеса, финансово-кредитных институтов, предлагающих свои услуги в этой области.

Инвестиционный портфель — набор реальных или финансовых инвестиций. Портфель представляет собой определенный набор из корпоративных акций, облигаций с различной степенью обеспечения и риска, а также бумаг с фиксированным доходом, гарантированным государством, то есть с минимальным риском потерь по основной сумме и текущим поступлениям.

Распределяя свои вложения по различным направлениям, инвестор может достичь более высокого уровня доходности своих вложений либо снизить степень их риска. Характерной особенностью портфеля является то, что риск портфеля может быть значительно меньше, чем отдельных инвестиционных инструментов, входящих в состав портфеля.

Отправной точкой формирования инвестиционного портфеля является взаимосвязанный анализ собственных возможностей инвестора и инвестиционной привлекательности внешней среды с целью определения приемлемого уровня риска в свете прибыльности и ликвидности баланса.

При формировании инвестиционного портфеля следует руководствоваться следующими соображениями:

1. безопасность вложений (уязвимость инвестиций от потрясений на рынке инвестиционного капитала);
2. стабильность получения дохода;
3. ликвидность вложений, то есть их способность участвовать в немедленном приобретении товара (работ, услуг), или быстро и без потерь в цене превращаться в наличные деньги.

Ситуация, когда все три условия соблюдены, попросту невозможна. Поэтому неизбежен компромисс. Если ценная бумага надежна, то доходность будет низкой, так как те, кто предпочитают надежность, будут предлагать высокую цену и съедут доходность. Главная цель при формировании портфеля состоит в

достижении наиболее оптимального сочетания риска и дохода для инвестора. Однако на фондовом рынке особенно четко видно противоречие между высокой доходностью бумаги и степенью ее риска, в том числе риском мошенничества.

Для решения экономических задач вообще и задач формирования портфеля инвестиций в частности используются различные математические модели. Инвестор должен найти самую приемлемую. Именно поэтому он использует не одну, а несколько моделей, чтобы в дальнейшем, при сравнении, выявить эффективность того или иного инвестиционного портфеля.

Для сравнения рассмотрим две известные модели – Марковица и Шарпа [1].

Модель Марковица – математическая модель формирования оптимального портфеля ценных бумаг при определенных условиях на основе теоретико-вероятностной формализации понятия доходности и риска.

Теоретические построения Марковица основаны на ряде предположений, часть из которых относится к условиям принятия инвестиционных решений - к свойствам фондового рынка, другая часть - к поведению инвестора. Важнейшими из предположений первой группы являются следующие:

- Инвестор при совершении операций с фондовыми активами свободен от транзакционных издержек и налогов.

-Инвестор может формировать любые допустимые (для данной модели) портфели, доходности которых являются также случайными величинами.

Относительно поведения инвестора выдвигаются две гипотезы - гипотеза ненасыщаемости и гипотеза несклонности к риску. Эти гипотезы означают, что:

-Инвестор всегда предпочитает более высокий уровень благосостояния, то есть при одинаковых прочих условиях всегда выбирает актив (портфель активов) с большей доходностью.

-Инвестор из двух активов с одинаковой доходностью обязательно предпочтет актив с меньшим риском.

Данная модель не может однозначно ответить на все

поставленные вопросы. Оценивая риск и доходность российского рынка ценных бумаг, можно лишь с определенной долей вероятности предположить, что будущая ситуация на фондовой бирже будет укладываться в рамки полученных статистических данных. Наличие огромного количества факторов, напрямую или косвенно влияющих на динамику котируемых эмитентов, не позволяет однозначно спрогнозировать и сократить до нуля риск потери инвестиций, но свести его до минимума с оптимальной доходностью возможно.

Согласно модели Марковица, ожидаемая доходность $E(r)$ портфеля ценных бумаг равна сумме ожидаемых доходностей каждого его актива, умноженной на долю этого актива в портфеле [2]:

$$E(r) = \sum_{i=1}^n w_i r_i$$

Риск σ_p портфеля равен:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i \sigma_i w_j \sigma_j \rho_{ij}}$$

где ρ_{ij} – коэффициент линейной корреляции между i -ым и j -ым активами.

Таким образом, прямая задача будет иметь следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n w_i r_i \rightarrow \max; \\ \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i \sigma_i w_j \sigma_j \rho_{ij}} \leq \sigma_{req}; \text{ при } w_i \geq 0; \\ \sum w_i = 1 \end{array} \right.$$

Обратной задачей будет следующая:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n w_i r_i \geq E(r)_{\text{req}}; \\ \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i \sigma_i w_j \sigma_j \rho_{ij}} \rightarrow \min; \text{при } w_i \geq 0; \\ \sum w_i = 1 \end{array} \right.$$

На основании этих формул инвестор должен определить эффективные портфели с помощью нахождения наилучших комбинаций ожидаемой доходности портфеля $E(r)$ и его риска σ_p при заданных ожидаемой доходности активов $E(r_i)$ и коэффициентов линейной корреляции ρ_{ij} . Марковиц геометрически представил множество эффективных комбинаций как кривую линию, внутри которой располагаются достижимые комбинации, а снаружи – неподходящие. Теория Марковица позволяет инвесторам определить и исключить неэффективные комбинации активов. В то же время, модель требует громоздких вычислений долей активов в портфеле с учетом их корреляции.

Однако следует учитывать, что ее недостатком является ориентация только на характеристики рассматриваемого набора ценных бумаг и использование исторических данных, которые не обеспечивают стабильности изменений котировок рассматриваемых активов на рынке. Таким образом, результаты данной модели могут быть применимы только в условиях стабильного фондового рынка, когда доходность активов действительно зависит от прошлых значений.

Для моделирования оптимального портфеля акций возьмем виртуальные данные об акциях 6 предприятий за 20 недель. Доход, который инвестор получает от актива, равен:

$$\text{Доход} = \frac{\text{Дивиденды} + (\text{Рыночная цена}_t - \text{Рыночная цена}_{t-1})}{\text{Рыночная цена}_{t-1}}$$

Мы в данных расчетах принимаем за доходность акций относительные недельные

изменения котировки акций на бирже. Исходные данные представим в таблице 1.

Таблица 1. Данные об изменении котировок ценных бумаг, %

Номер недели	Код предприятия					
	NITR	UNAF	SVGZ	KRAZ	UTLM	MSICH
1	7,83	15,79	40,89	18,01	3,73	20,37
2	0,11	15,31	-11,72	-4,21	-1,20	2,73
3	2,35	-0,67	8,73	0,00	4,20	3,51
4	7,08	1,09	-0,56	3,30	23,67	8,42
5	-1,17	0,54	-5,38	-4,26	-4,18	-1,42
6	-3,64	-6,06	-8,89	-4,44	-10,94	-8,09
7	5,72	11,97	2,51	2,33	8,94	4,10
8	-4,83	-0,09	-0,48	1,70	-2,75	-0,39
9	-1,52	1,86	4,59	2,79	1,76	-1,57
10	4,54	-2,63	4,22	-0,54	-0,40	1,83
11	-7,40	2,29	7,88	0,00	-0,69	0,35
12	2,34	-3,39	-0,93	-1,64	-1,58	-4,04
13	-0,42	1,81	-0,39	0,00	-1,36	0,45
14	-3,34	-0,77	-1,32	-2,22	-3,94	-0,90
15	0,00	1,42	0,86	1,14	-2,41	1,24
16	-6,38	0,45	7,34	1,12	1,40	-0,34
17	1,27	0,13	-0,23	-1,67	-0,05	-1,70
18	-0,80	-0,01	1,04	0,00	-0,07	0,78
19	1,15	4,41	5,61	-1,13	-0,77	-3,06
20	1,14	-2,56	-0,36	-2,86	-3,23	-7,06

Используем модель Марковица для определения оптимального портфеля акций шести открытых акционерных обществ. На основе исходных данных определили доходность и риск по каждой акции, что показано в табл. 2. Также

рассчитали коэффициенты линейной корреляции между доходностью этих ценных бумаг, которая оказалась положительной во всех случаях (см. табл. 3).

Таблица 2. Доходность и риск рассматриваемых акций

Код предприятия	Доходность, %	Риск, %
NITR	0,20	3,16
UNAF	2,05	3,95
SVGZ	2,67	6,06
KRAZ	0,37	2,78
UTLM	0,51	4,07
MSICH	0,76	3,69

Доходность выбранных акций колеблется от 0,2% до 2,67%, их риск также неодинаков и находится в пределах от 2,78% до 6,06%, при

этом самый высокий риск абсолютно закономерно наблюдается у акций предприятия SVGZ с самой высокой доходностью.

Таблица 3. Коэффициенты корреляции между доходностью акций

	NITR	UNAF	SVGZ	KRAZ	UTLM	MSICH
NITR	1,00					
UNAF	0,38	1,00				
SVGZ	0,36	0,42	1,00			
KRAZ	0,46	0,53	0,91	1,00		
UTLM	0,59	0,30	0,24	0,42	1,00	
MSICH	0,58	0,69	0,74	0,86	0,58	1,00

При определении оптимального диверсифицированного портфеля ценных бумаг мы задали допустимый риск в размере 0,9% для решения прямой задачи и ожидаемую доходность на уровне 1,2% для решения обратной задачи.

Результаты вычислений представлены в табл. 4. Согласно вычислениям, как в решении прямой, так и обратной задачи модель не использует акции предприятий *NITR* и *MSICH*.

Таблица 4. Структура оптимального портфеля по модели Марковица

Требования	Прямая задача	Обратная задача
	$\sigma_p \leq 0,9\%$	$E(r) \geq 1,2\%$
Структура портфеля акций		
NITR	0%	0%
UNAF	33,94%	39,78%
SVGZ	2,66%	5,57%
KRAZ	38,34%	30,69%
UTLM	25,06%	23,96%
MSICH	0%	0%
Характеристики оптимального портфеля	$\sigma_p = 0,9\%$	$\sigma_p = 0,943\%$
	$E(r) = 10,36\%$	$E(r) = 1,2\%$

Модель У. Шарпа, в отличие от теории Марковица, учитывает связи каждого актива не друг с другом, а с рынком ценных бумаг в общем. Допущения модели включают следующие положения:

- доходность актива равна ее математическому ожиданию;
- существует линейная регрессия между доходностью рынка и доходностью каждого актива;

- риск актива означает уровень зависимости изменений его доходности от изменений общей доходности рынка;

- как и в модели Марковица, данные прошлых периодов о доходности актива и ее дисперсии считаются полностью отражающими будущие доходность и риск;

- на рынке существует безрисковый актив.

Согласно этой модели, ценных бумаг описывается ожидаемая доходность портфеля следующим уравнением:

$$E(r) = R_f + \sum a_i w_i + (R_m - R_f) \sum \beta_i w_i$$

где R_f – доходность безрискового актива,
 a_i – избыточная доходность i -ого актива,
 R_m – ожидаемая доходность рынка,
 β_i – риск i -ого актива.

Портфельный риск в модели Шарпа равен:

$$\sigma_i = \sqrt{\left(\sum (\beta_i w_i)\right)^2 + \sum (\sigma_{ei}^2 w_i^2)}$$

где σ_{ei}^2 – остаточный риск i -ого актива.

В модели Шарпа по сравнению с теорией Марковица появляются некоторые дополнительные переменные, а именно остаточный

риск и избыточная доходность актива.

Прямая задача описывается следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_f + \sum a_i w_i + (R_m - R_f) \sum \beta_i w_i \rightarrow \max; \\ \sqrt{\left(\sum (\beta_i w_i)\right)^2 + \sum (\sigma_{ei}^2 w_i^2)} \leq \sigma_{req}; \text{ при } w_i \geq 0 \\ \sum w_i = 1 \end{array} \right.$$

Обратная задача представлена следующей системой:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_f + \sum a_i w_i + (R_m - R_f) \sum \beta_i w_i \geq E(r)_{req}; \\ \sqrt{\left(\sum (\beta_i w_i)\right)^2 + \sum (\sigma_{ei}^2 w_i^2)} \rightarrow \min; \text{ при } w_i \geq 0 \\ \sum w_i = 1 \end{array} \right.$$

Одноиндексная модель Шарпа позволяет инвестору оценить ожидаемую доходность и риск его инвестиций с учетом ситуации на

рынке активов. Однако, главным недостатком этой модели является необходимость прогнозирования уровня доходности рынка и

ожидаемого уровня доходности безрискового актива. Кроме того, данная модель не учитывает изменения в доходности безрискового актива. Также при значительном изменении соотношения доходностей рынка и безрискового актива могут возникнуть ошибки при определении оптимального портфеля ценных бумаг.

Для расчетов параметров портфеля ценных бумаг по модели Шарпа нам необходимы данные о доходности рынка в целом и о безрисковой доходности за рассматриваемый период. Для расчета безрисковой доходности,

которая также изменяется со временем, необходимы данные об изменениях стоимости государственных внутренних процентных облигаций за тот же период. Эти данные приведены в табл. 5. Как видно из таблицы, доходность рынка значительно отличается от безрисковой доходности как по абсолютной величине значений, так и по колебаниям.

На основании данных таблиц 1 и 5 мы рассчитали характеристики для каждой акции, необходимые для построения модели Шарпа. Результаты представлены в табл. 6.

Таблица 5. Данные о доходности рынка в целом и о безрисковой доходности

Номер недели	Доходность рынка	Безрисковая доходность
1	12,87	0,21
2	2,14	0,00
3	3,11	0,08
4	5,82	0,00
5	1,10	0,05
6	-8,49	5,75
7	4,41	-9,63
8	-0,48	0,64
9	1,45	0,25
10	1,21	0,17
11	3,60	0,32
12	-2,72	-0,59
13	0,13	1,65
14	-1,47	0,04
15	0,04	0,03
16	-0,21	0,01
17	-1,40	0,00
18	-0,50	1,07
19	-0,97	0,00
20	-3,69	0,00

Таблица 6. Характеристики ценных бумаг согласно модели Шарпа

Код	Доходность, %	Риск, %	β -риск	Избыточная доходность	Остаточный риск
NITR	0,20	3,16	0,514	-0,21	2,68
UNAF	2,05	3,95	0,996	1,25	2,61
SVGZ	2,67	6,06	1,786	1,25	4,74
KRAZ	0,37	2,78	0,9	-0,35	2,08
UTLM	0,51	4,06	1,006	-0,30	3,19
MSICH	0,76	3,69	1,323	-0,29	1,52

При моделировании оптимального портфеля акций, спрогнозировав тренд изменения доходности рынка и безрисковой доходности, мы задали допустимый риск в размере 0,9% для решения прямой задачи и ожидаемую доходность на уровне 1,2% для решения обратной задачи, а также рыночную доходность 1% и

безрисковую доходность на уровне 0,01%. Результаты применения модели Шарпа представлены в табл. 7. Как видим из таблицы, при максимизации прибыли модель Шарпа не включает в оптимальный портфель акции предприятия *MSICH*, а при минимизации риска – акции предприятий *SVGZ* и *MSICH*.

Таблица 7. Оптимальный портфель ценных бумаг по модели Шарпа

Прогноз	Доходность рынка $R_m=1\%$ Безрисковая доходность $R_f=0,01\%$	
	Прямая задача $\sigma_p \leq 0,9\%$	Обратная задача $E(r) \geq 1,2\%$
Структура портфеля акций		
NITR	28,46%	38,36%
UNAF	14,61%	43,54%
SVGZ	27,09%	0%
KRAZ	28,00%	15,59%
UTLM	1,84%	2,51%
MSICH	0%	0%
Характеристики оптимального портфеля	$\sigma_p=0,9$	$\sigma_p=1,759$
	$E(r)=1,403$	$E(r)=1,2$

В работе рассмотрены модели диверсификации портфеля ценных бумаг Марковица и Шарпа. Выше сформулированы их основные принципы и описаны математические модели для решения прямой и обратной задач оптимизации структуры портфеля ценных бумаг. В результате

вычислений, получены по два варианта эффективного портфеля акций при максимизации прибыли (прямая задача) и минимизации риска (обратная задача) с помощью моделей Марковица и Шарпа. При решении прямой задачи значение доходности портфеля отличается незначительно (на 0,367%), а при

решении обратной задачи значения риска различаются существенно (в модели Марковица он составляет 0,943%, а в модели Шарпа – 1,759%).

В данном случае следует предположить, что менее точны результаты модели Шарпа, т.к. модель Шарпа следует применять «при рассмотрении большого количества ценных бумаг, которые описывают значительную часть рынка». В условиях развитых и относительно стабильно функционирующих фондовых рынков западных стран обе

классические модели Марковица и Шарпа работают эффективно. Однако для развивающегося данного фондового рынка прогнозирование рыночной доходности и доходности безрискового актива становится весьма затруднительным. На основе проведенного анализа моделей оптимизации портфеля ценных бумаг и соответствующих расчетов сделан вывод о том, что применительно для данного случая более подходящей из двух классических схем выбора портфеля ценных бумаг является модель Марковица.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Быльцов С.Ф. Настольная книга российского инвестора: Учеб. практ. пособие/ С.Ф. Быльцов. – СПб.: Бизнес-Пресса, 2014. – 506 с.
- 2 Дубинина А.Г., Орлова С.С., Шубина И.Ю., Хромов А.В. Excel для экономистов и менеджеров. – СПб.: Питер, 2015. – 295 с.

REFERENCES

- 1 Byltzov S.F. Table book of Russian investor: Uchebno-prakticheskoe posobie/ S.F. Byltzov. – Spb.: Business-Press, 2014. – P. 506.
- 2 Dubinina A.G., Orlova S.S., Shubina I.U., Khromov A.V. Excel for economists and managers. – СПб.: Piter, 2015. – P. 295.